Funzioni differenziabili

Convergenza uniforme

Definizione 1. *Sia K un insieme in $\mathbb{R}^d$ e $G : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Definiamo*

$$\|G\|_{L^\infty(K)} := \sup_{x \in K} |G(x)|.$$

Definizione 2. *Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un insieme fissato e sia $F_n : K \to \mathbb{R}^m$ una successione di funzioni. Diciamo che la successione di funzioni F_n converge uniformement alla funzione $F_\infty : K \to \mathbb{R}^m$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $N > 0$ tale che*

$$\|F_n - F_\infty\|_{L^\infty(K)} \le \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad n \ge N.$$

Definizione 3. *Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un insieme fissato e sia $F_r : K \to \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni che dipende dal parametro $r > 0$. Diciamo che F_r converge uniformement alla funzione $F_0 : K \to \mathbb{R}^m$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\|F_r - F_0\|_{L^\infty(K)} \le \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad 0 < r < \delta.$$

Continuità

Proposizione 4. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}\ , \quad F_r(x) = F(x_0 + rx)\,.$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) *La funzione F è continua in x_0.*

(ii) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in $\overline{B}_1$ alla funzione costante*

$$F_0(x) = F(x_0) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione: Supponiamo che la funzione F NON sia continua in x_0. Allora esiste una successione di $x_n \to x_0$ tale che

$$|F(x_n) - F(x_0)| > \varepsilon > 0 \quad \text{per ogni} \quad n.$$

Consideriamo $r > 0$. Allora

$$F(x_n) = F(x_0 + x_n - x_0) = F\Big(x_0 + r\frac{x_n - x_0}{r}\Big) = F_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r}\Big).$$

Siccome $x_n \to x_0$, per n abbastanza grande $\dfrac{x_n - x_0}{r} \in B_1$. Ma allora,

$$\|F_r - F(x_0)\|_{L^\infty(B_1)} \ge \Big|F_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r}\Big) - F(x_0)\Big| > \varepsilon.$$

Di conseguenza, F_r NON converge uniformemente in B_1 alla funzione costante $F(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che la famiglia F_r NON converga uniformemente in B_1 alla funzione costante $F(x_0)$. Allora, esistono

– una successione $r_n \to 0$,

– ed una successione di punti $x_n \in B_1$,

tali che

$$|F_{r_n}(x_n) - F(0)| > \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n.$$

In particolare,

$$\big|F_{r_n}(x_n) - F(x_0)\big| = \big|F\big(x_0 + r_n x_n\big) - F(x_0)\big| > \varepsilon.$$

Siccome $x_0 + r_n x_n$ converge a x_0, abbiamo che F non è continua in x_0. □

Proposizione 5. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r : \overline{B}_1 \to \mathbb{R} \ , \quad F_r(x) = \frac{1}{r}\Big(F(x_0 + rx) - F(x_0)\Big) \,.$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in $\overline{B}_1$ alla funzione lineare*

$$L(x) = v \cdot x \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dove $v \in \mathbb{R}^d$ è un vettore fissato.

(ii) *Nel punto x_0 la funzione F ha uno sviluppo di Taylor al primo ordine:*

$$F(x + x_0) = F(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|),$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Big|F(x) - \big(F(x_0) + v \cdot (x - x_0)\big)\Big|}{|x - x_0|} = 0.$$

Dimostrazione: Supponiamo che la famiglia F_r NON converga uniformemente in B_1 alla funzione $L(x) = v \cdot x$. Allora, esistono una successione $r_n \to 0$ ed una successione di punti $x_n \in B_1$, tali che

$$|F_{r_n}(x_n) - v \cdot x_n| > \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< \Big|\frac{1}{r_n}\Big(F(x_0 + r_n x_n) - F(x_0)\Big) - v \cdot x_n\Big| \\
&= |x_n| \frac{\Big|F(x_0 + r_n x_n) - F(x_0) - v \cdot (r_n x_n)\Big|}{|r_n x_n|} \\
&\leq \frac{\Big|F(x_0 + r_n x_n) - F(x_0) - v \cdot (r_n x_n)\Big|}{|r_n x_n|}.
\end{aligned}$$

Quindi$F$ non è sviluppabile al primo ordine in x_0.

Supponiamo che la funzione F NON abbia lo sviluppo di Taylor al primo ordine in x_0. Allora esiste una successione di $x_n \to x_0$ tale che

$$\frac{\Big|F(x_n) - \big(F(x_0) + v \cdot (x_n - x_0)\big)\Big|}{|x_n - x_0|} > \varepsilon > 0 \quad \text{per ogni} \quad n.$$

Sia $r > 0$. Allora

$$F(x_n) - F(x_0) = F(x_0 + x_n - x_0) - F(x_0) = F\Big(x_0 + r\frac{x_n - x_0}{r}\Big) - F(x_0) = rF_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r}\Big).$$

Si ha quindi

$$\varepsilon < \frac{\Big|rF_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r}\Big) - v \cdot (x_n - x_0)\Big|}{|x_n - x_0|} = \frac{r}{|x_n - x_0|}\Big|F_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r}\Big) - v \cdot \frac{x_n - x_0}{r}\Big|.$$

Scegliendo

$$r_n = 2|x_n - x_0|,$$

abbiamo che

$$\frac{x_n - x_0}{r_n} \in B_1 \qquad \text{e} \qquad \Big|F_r\Big(\frac{x_n - x_0}{r_n}\Big) - v \cdot \frac{x_n - x_0}{r_n}\Big| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, F_r NON converge uniformemente in B_1 alla funzione lineare $L(x) = v \cdot x$. $\square$

Funzioni differenziabili - definizione

Definizione 6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che F è differenziabile nel punto $x_0 \in \Omega$ se e solo se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^d$ tale che*

$$F(x) = F(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Derivabilità e gradiente di una funzione differenziabile

Proposizione 7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, ovvero tale che*

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + v \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\Big(\big|(x - x_0, y - y_0)\big|\Big),$$

per un qualche vettore $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Allora F è **derivabile** *in (x_0, y_0), ovvero esistono le* **derivate parziali**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{s \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + s) - F(x_0, y_0)}{s}.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = a \qquad e \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = b,$$

o in altri termini v è il gradiente di F in (x_0, y_0):

$$v = \nabla F(x_0, y_0).$$

Funzioni non differenziabili

Proposizione 8. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione 1-omogenea e tale che $F(0) = 0$. Allora F è differenziabile in zero se e solo se*

$$F(x) = v \cdot x$$

per un qualche vettore $v \in \mathbb{R}^d$.

Esercizio 9. *Trovare una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-omogenea e continua, ma non differenzaibile in zero.*

Esercizio 10. *Trovare una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 1-omogenea e continua, ma non differenzaibile in zero.*

Esercizio 11. *Quali delle funzioni seguenti sono differenziabili in zero ?*

(1) $xy + y^2$

(2) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(4) $\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(5) $\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Esercizio 12. *Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio 2-omogeneo. Dimostrare che la funzione*

$$F(x, y) = \frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

è continua, ma non è differenziabile in zero.

Le soluzioni degli esercizi 9-12 si trovano alla pagina successiva.

Soluzioni degli esercizi della pagina precedente

Soluzione Es.9 Per esempio $F(x) = |x|$.

Soluzione Es.10 Per esempio $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluzione Es.11

(1) La funzione è differenziabile in zero perché $xy + y^2 = o(\sqrt{x^2 + y^2})$.

(2) La funzione non è differenziabile in zero perché è 1-omogenea, ma non è lineare. (Perché non è lineare ?)

(3) La funzione non è differenziabile in zero perché è 1-omogenea, ma non è lineare. (Perché non è lineare ?)

(4) La funzione è differenziabile in zero perché è $o(\sqrt{x^2 + y^2})$.

(5) (3) La funzione non è differenziabile in zero perché è 1-omogenea, ma non è lineare. (Perché non è lineare ?)

Soluzione Es.12

- Verificare che la funzione F è 1-omogenea.
- Mostrare che se $P(x, y) = (ax + by)\sqrt{x^2 + y^2}$, allora $P(x, y) = (ax + by)(cx + dy)$.
- Dedurre che $(cx + dy)^2 = x^2 + y^2$.
- Mostrare che l'uguaglianza del punto precedente non è possibile.

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, la funzione*

$$t \mapsto F(tx,ty)$$

è derivabile in zero.

(f) F *è continua in zero.*

Esercizio 14. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, la funzione*

$$t \mapsto F(tx,ty)$$

è derivabile in zero.

(f) F *è continua in zero.*

Esercizio 15. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 16. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 17. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 18. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 19. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - yx^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) F *è differenziabile in zero.*

(c) F *è di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$

(d) F *è di classe* C^2 *in* $\mathbb{R}^2$

(e) $\partial_{xy}F(0,0) = \partial_{yx}F(0,0)$.

Esercizio 20. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sqrt{|x|}}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata in* B_1.

Funzioni differenziabili - esercizi 2

La seguente proposizione potrebbe essere utile negli esercizi seguenti.

Proposizione 21. *Siano* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *e* $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$F(x) - G(x) = o(|x|)\,.$$

Dimostrare che F *è differenziabile in zero se e solo se lo è* G.

Esercizio 22. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 23. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 24. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 25. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

Esercizio 26. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

Esercizio 27. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*